EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 : Fonction exponentielle de base e, fonction logarithme népérien

Exercice 1

Résolution d'une inéquation $a^n \leqslant b$

Un laboratoire pharmaceutique souhaite tester le temps de réaction d'un nouvel antibiotique. Pour cela, l'équipe de recherche dispose d'une culture de 10^{10} bactéries dans laquelle elle introduit l'antibiotique. Elle remarque que le nombre de bactéries est divisé par quatre toutes les heures. On note u_0 le nombre de bactéries au moment de l'introduction de l'antibiotique. Soit (u_n), la suite représentant le nombre de bactéries, contenues dans la culture, n heures après l'introduction de l'antibiotique.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,25.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{13}, arrondir à l'unité.
5. Déterminer au bout de combien d'heures le nombre de bactéries deviendra inférieur à 100.

CORRIGÉ

1. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$.
2. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}25 \times u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,25.
3. On en déduit que, pour tout naturel n, $u_n = u_0 \times (0{,}25)^n$, d'où $u_n = 10^{10} \times (0{,}25)^n$.
4. $u_{13} = 10^{10} \times (0{,}25)^{13} \approx 149$.
5. On cherche n tel que $u_n \leqslant 100$, c'est-à-dire :

$10^{10}\,(0{,}25)^n \leqslant 100$; $(0{,}25)^n \leqslant \dfrac{10^2}{10^{10}}$; $(0{,}25)^n \leqslant 10^{-8}$.

> Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier n, $u_n = u_0\, q^n$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc,
pour tous nombres réels strictement positifs a et b, $a \leqslant b$ est équivalent à : $\ln a \leqslant \ln b$.

D'où : $\ln\,[(0{,}25)^n] \leqslant \ln(10^{-8})$;
$n \ln(0{,}25) \leqslant -8\ln 10$;
$n \geqslant \dfrac{-8\ln 10}{\ln(0{,}25)}$.
$\dfrac{-8\ln 10}{\ln(0{,}25)} \approx 13{,}28$.

> - Pour tout nombre entier relatif n et tout nombre réel strictement positif a, $\ln a^n = n \ln a$.
> - Pour tout x de $]0, 1[$ $\ln x < 0$. $0{,}25 < 1$; donc $\ln(0{,}25) < 0$, en divisant les deux membres de l'inégalité par un même nombre négatif, $\ln(0{,}25)$, elle change de sens.

On peut prendre $n = 14$. Au bout de 14 heures, le nombre de bactéries devient inférieur à 100.

Exercice 2

Évolution d'une température

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20 °C. On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11 °C. t est le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle [0, 9].

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0, 9]. On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle [0, 9] par $f(t) = 9e^{-0,12t} + 11$.

2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.

3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C.

5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

CORRIGÉ

1. La température diminue : f est décroissante.

2. Pour tout t de [0,9], $f'(t) = 9(-0,12e^{-0,12t}) = -1,08e^{-0,12t}$.

Pour tout réel a, $e^a > 0$, donc $f'(t) < 0$ sur [0,9]. f est décroissante sur [0,9].

3. $f(9) \approx 14,1$. C'est la température à 7 heures du matin.

4. On obtient $t \approx 6,76$. L'heure est 4 h 46 du matin.

5. On résout $f(t) \leqslant 15$, qui est équivalent à $9e^{-0,12t} + 11 \leqslant 15$; $9e^{-0,12t} \leqslant 4$;

$e^{-0,12t} \leqslant \frac{4}{9}$; $\ln e^{-0,12t} \leqslant \ln \frac{4}{9}$; $-0,12t \leqslant \ln \frac{4}{9}$; $t \geqslant \frac{-1}{0,12} \times \ln \frac{4}{9} \approx 6,76$. (En divisant par $-0,12 < 0$ les deux membres, l'inégalité change de sens.)

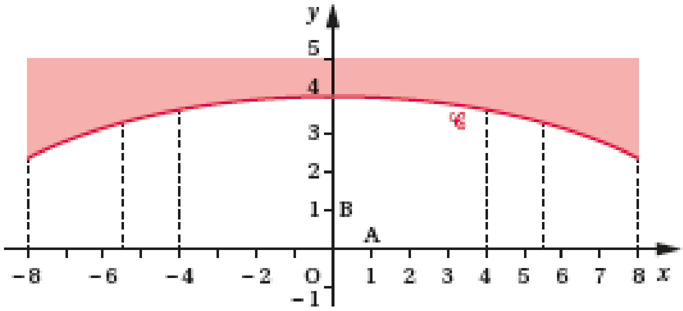
Chapitre 6 : Calcul différentiel et intégral

Exercice 1

Avec la fonction expenentielle de base e

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 m enjambe une route à double circulation. La figure ci-dessous donne une vue de l'une des deux façades de ce pont (1 unité représente 1 mètre). La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 m au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprise entre – 8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



A. *Étude de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}$*

Soit la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8, 8]$, par : $f(x) = k - 0{,}5(e^{0{,}2x} + e^{-0{,}2x})$ où k désigne un entier naturel fixé. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O ; A, B).

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-8, 8]$: $f(x) = 5 - 0{,}5(e^{0{,}2x} + e^{-0{,}2x})$.

2. Vérifier que la fonction f' dérivée de la fonction f est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8, 8]$, par : $f'(x) = 0{,}1e^{-0{,}2x}(1 - e^{0{,}4x})$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-8, 8]$. En déduire le tableau de variation de f sur $[-8, 8]$.

B. *Calcul d'aire*

La façade du pont est la partie colorée représentée sur la figure précédente.

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $I = \int_{-8}^{8} (e^{0{,}2x} + e^{-0{,}2x})\,dx$.

2. Vérifier que l'aire de la façade exprimée en m² vaut $5(e^{1{,}6} - e^{-1{,}6})$.

3. On veut peindre les deux façades du pont. En déduire l'aire S exprimée en m² de la surface totale à peindre ; en donner une valeur en m² approchée arrondie à 10^{-2}.

4. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 5 litres.

Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 3 m² par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?

CORRIGÉ

A. 1. $f(0)=4$ équivaut à : $4=k-0,5\times2$, $4=k-1$, $k=5$. Donc $f(x)=5-0,5(e^{0,2x}+e^{-0,2x})$.

> On utilise le résultat ⑪ du ①B.

2. Pour tout x de $[-8,8]$, $f'(x)=-0,5\,[0,2e^{0,2x}-0,2e^{-0,2x}]$ $f'(x)=-0,1e^{0,2x}+0,1e^{-0,2x}$.
Développons l'expression donnée :
$0,1e^{-0,2x}(1-e^{0,4x})=0,1e^{-0,2x}-0,1e^{-0,2x}\times e^{0,4x}=0,1e^{-0,2x}-0,1e^{-0,2x+0,4x}=0,1e^{-0,2x}-0,1e^{0,2x}=f'(x)$

3. Pour tout x de $[-8,8]$, $e^{-0,2x}<0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-e^{0,4x}$. Les inéquations suivantes sont équivalentes sur $[-8,8]$:
$1-e^{0,4x}\geq0$, $1\geq e^{0,4x}$, $\ln1\geq\ln e^{0,4x}$, $0\geq0,4x$, $0\geq x$.
Donc $f'(x)\geq0$ équivaut à $x\leq0$. D'où le tableau de variation :

x	-8		0		8
$f'(x)$		$+$		$-$	
Variations de f	$f(-8)$	↗	4	↘	$f(8)$

B. 1. $I=\left[\dfrac{1}{0,2}e^{0,2x}+\dfrac{1}{-0,2}e^{-0,2x}\right]_{-8}^{8}$, $I=\left[5e^{0,2x}-5e^{-0,2x}\right]_{-8}^{8}$,
$I=(5e^{1,6}-5e^{-1,6})-(5e^{1,6}-5e^{-1,6})$, $I=10e^{1,6}-10e^{-1,6}=10(e^{1,6}-e^{-1,6})$.

> Une primitive de $x\mapsto e^{ax}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{a}e^{ax}$ $(a\neq0)$.
> Voir l'"exemple 4 au paragraphe ②D.

2. L'aire de la façade est :
$\mathcal{A}=\int_{-8}^{8}(5-f(x))\,dx$,
$\mathcal{A}=\int_{-8}^{8}0,5(e^{0,2x}+e^{-0,2x})\,dx$,
$\mathcal{A}=0,5\int_{-8}^{8}(e^{0,2x}+e^{-0,2x})\,dx=0,5\,I$,
$\mathcal{A}=0,5\times10(e^{1,6}-e^{-1,6})=5(e^{1,6}-e^{-1,6})$.

> A est l'aire de la partie du plan limitée par deux courbes représentatives.
> Voir le paragraphe ⑤C.

3. L'aire S, en m², est de $2\mathcal{A}=10(e^{1,6}-e^{-1,6})$.
$S\approx47,51$ m².

4. Un bidon de 5 litres permet de couvrir 15 m². Il faut donc 4 bidons.

Exercice 2

Avec la fonction logarithme népérien

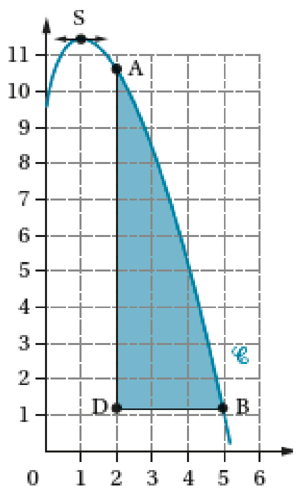
Calcul d'aire

Un ingénieur prépare un plan pour la réalisation de la voile d'un bateau. La voile est représentée en bleu dans le repère orthonormé de la figure. L'unité représente un mètre.

$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1\,;+\infty[$ par : $f(x)=12+ax^2+\ln x$.

a est un nombre réel à déterminer dans la partie **A**.

S est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2, B est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 5, D est le point d'intersection de la droite d'équation $x=2$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B.



A. *Détermination de la fonction f*

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

1. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point S est horizontale. Déterminer $f'(1)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0,1\,;+\infty[$.

3. a. Exprimer $f'(1)$ en fonction de a.

b. Démontrer que $a = -0,5$.

B. *Calcul d'une aire*

1. Démontrer que la fonction F définie sur $[0,1\,;+\infty[$ par :
$F(x) = 11x - \frac{1}{6}x^3 + x\ln x$ est une primitive de f sur $[0,1\,;+\infty[$.

2. a. Calculer la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$.

b. Vérifier que la valeur approchée de cette aire, arrondie au dixième, est 20,2 m².

3. Cette voile doit être légère et résistante. Elle sera fabriquée dans un tissu ayant une masse de 260 grammes par mètre carré. La voile pèsera-t-elle moins de 5 kg ? Justifier.

CORRIGÉ

A. 1. $f'(1) = 0$.

2. Pour tout x de $[0,1\,;+\infty[$, $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x}$.

3. a. $f'(1) = 2a + 1$.

b. $f'(1) = 0$ et $f'(0) = 2a + 1$, donc $2a + 1 = 0$, $a = -0,5$, $f(x) = 12 - 0,5x^2 + \ln x$.

B. 1. Pour tout x de $[0,1\,;+\infty[$:

$F'(x) = 11 - \frac{1}{6}(3x^2) + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$,

$F'(x) = 11 - 0,5x^2 + \ln x + 1 = 12 - 0,5x^2 + \ln x$,

$F'(x) = f(x)$.

Pour démontrer que F est une primitive de f, on vérifie que $F'(x) = f(x)$.

2. a. $\mathcal{A} = \int_2^5 f(x)dx = F(5) - F(2)$

$\mathcal{A} = 55 - \frac{125}{6} + 5\ln 5 - 22 + \frac{8}{6} - 2\ln 2$,

$\mathcal{A} = 33 - \frac{117}{6} + 5\ln 5 - 2\ln 2$.

b. Avec la calculatrice, en arrondissant à 10^{-1}, on obtient $\mathcal{A} \approx 20,2$.

3. L'aire de la voile est : $\mathcal{V} = \mathcal{A} - \mathcal{A}_1$ où $\mathcal{A}_1$ est l'aire d'un rectangle de côtés DB et $f(5)$.

$\mathcal{A}_1 = 3 \times f(5) \approx 3,3$. D'où $\mathcal{V} \approx 16,9$ m². Le poids en kg de la voile est donc : $16,9 \times 0,26 \approx 4,4 < 5$.

Chapitre 7 : Équations différentielles

Exercice 1

Équation $y' = ay$

Après de violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.

Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.

On admet que le volume de pesticides, en litres, dans ce bassin est une fonction du temps définie par $g(t) = f(t) + 1\,200$, t étant le temps en minutes et f étant une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -5 \times 10^{-3}y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

En déduire l'expression de $g(t)$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume des pesticides dans l'eau est nul.

Déterminer la fonction g satisfaisant à cette condition.

3. Le corps médical considère que des affections cutanées peuvent survenir dès que le taux de pesticides dans le bassin atteint 2 %. Au bout de combien de minutes ce taux est-il atteint ? (On donnera d'abord le résultat exact puis la valeur approchée arrondie à une minute.)

CORRIGÉ

1. (E) est une équation de la forme $y' = ay$ avec $a = -5 \times 10^{-3}$.

Les solutions sont donc définies sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = k\,e^{-5\times10^{-3}t}$, où k est une constante quelconque.

$f(t) = ke^{at}$

On en déduit que : pour tout t de $[0, +\infty[$, $g(t) = k\,e^{-5\times10^{-3}t} + 1\,200$.

2. $g(0) = 0$ se traduit par : $k\,e^0 + 1\,200 = 0$, donc : $k = -1\,200$.

$g(t) = -1\,200\,e^{-5\times10^{-3}t} + 1\,200$.

3. On cherche t tel que $g(t) = 30\,000 \times 0{,}02 = 600$;

$-1\,200\,e^{-5\times10^{-3}t} + 1\,200 = 600$;

$-1\,200\,e^{-5\times10^{-3}t} = -600$; $e^{-5\times10^{-3}t} = 0{,}5$; d'où : $\ln(e^{-5\times10^{-3}t}) = \ln 0{,}5$;

$-5 \times 10^{-3}t = \ln 0{,}5$.

Pour calculer 2 % de 3 000, on multiplie par 0,02.

$t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-5\times10^{-3}} \approx 139$. Le taux de 2 % est atteint au bout d'environ 139 minutes (2 heures 19 minutes).

$\ln e^x = x$.

Exercice 2

Demi-vie d'un médicament

Le traitement de certaines infections touchant l'intérieur de l'œil nécessite l'administration d'antibiotiques. Dans cet exercice, on étudie l'évolution au cours du temps de la concentration d'un antibiotique chez un patient.

On modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang, exprimée en $\mu g \cdot L^{-1}$, en fonction du temps, exprimé en heure, lors d'une injection par intraveineuse, par une fonction solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,2y = 0$,

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

La concentration initiale de l'antibiotique est $20\,\mu g \cdot L^{-1}$.

1. a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale.

Cette fonction f modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang.

2. On appelle demi-vie d'un médicament, la durée, en heure, à l'issue de laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

a. Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $e^{-0,2t} = 0,5$.

b. En déduire la demi-vie de cet antibiotique. Arrondir ce résultat à la minute.

CORRIGÉ

1. a. L'équation (E) s'écrit $y' = -0,2y$, qui est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,2$. Les solutions de (E) sont donc définies par $f(t) = k\,e^{at} = k\,e^{-0,2t}$, où k est une constante quelconque.

b. $f(t) = 20$ ce qui équivaut à : $ke^0 = 20$, $e^0 = 1$ donc $k = 20$.

La fonction cherchée est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 20\,e^{-0,2t}$.

2. a. L'équation $e^{-0,2t} = 0,5$ est équivalente à : $\ln(e^{-0,2t}) = \ln 0,5$, $-0,2t = \ln 0,5$

$\ln e^a = a$

$t = \dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$.

b. On cherche t tel que $f(t) = \dfrac{20}{2} = 10$, c'est-à-dire $20\,e^{-0,2t} = 10$, $e^{-0,2t} = 0,5$.

$\dfrac{\ln 0,5}{-0,2} \approx 3,47$.

$0,47 \times 60 \approx 28$. La demi-vie est d'environ 3 heures et 28 minutes.

Chapitre 8 : Nombres complexes

Exercice 1

Forme algébrique, trigonométrique, exponentielle

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

a. Écrire z_1 sous forme algébrique.

b. Vérifier que z_1 est solution de l'équation $(2+i)z = 1+3i$.

2. Écrire le nombre complexe $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.

3. On considère z_3 le nombre complexe de module 4 et d'argument $\frac{7\pi}{6}$.

Vérifier que $z_3 = {z_1}^2 \times z_2$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ direct où l'unité est 1 cm.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$.

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Démontrer que le triangle OBC est rectangle en O.

CORRIGÉ

1. a. $z_1 = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} + i\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1 + i$.

b. $(2+i)(1+i) = 2 + 2i + i + i^2 = 2 + 3i - 1 = 1 + 3i$; $(2+i)(1+i) = 1 + 3i$, $z_1 = 1 + i$ est solution de l'équation $(2+i)z = 1 + 3i$.

2. $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Notons $\theta = \arg z_2$.

$\theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

À l'aide de résultats rappelés au ①B et au ①C, on obtient : $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

D'où la forme exponentielle : $z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$.

3. $z_1^2 \times z_2 \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times 2e^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)^2 \times 2e^{\frac{2\pi}{3}}$; $z_1^2 \times z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}} \times 2e^{\frac{2\pi}{3}} = 4e^{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 4e^{\left(\frac{3\pi+4\pi}{6}\right)}$

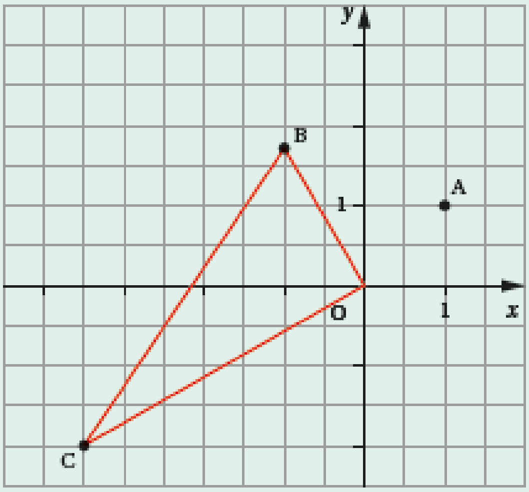
$z_1^2 \times z_2 = 4e^{\frac{7\pi}{6}} = z_3$.

Si $z = a + bi$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Si $\theta = \arg z$ $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$

$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$

4. a.



b. $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, d'où : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$z_c = -2\sqrt{3} - 2i$, d'où $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = (-1) \times (-2\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times (-2)$;

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux, le triangle OBC est rectangle en O.

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par le vecteur $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.