9 Calcul vectoriel

Premières professionnelles des groupements A et B

En physique, en mécanique, les vecteurs sont utilisés pour représenter les forces, les moments, les vitesses, les accélérations, les contraintes…

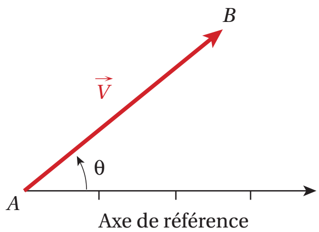
1 Calcul vectoriel dans le plan

A Définitions et constructions

- Un **vecteur** $\vec{V}$ est défini par une *direction*, un *sens* et une *norme*.

EXEMPLE

Sur la figure, $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. La direction est définie par rapport à un axe de référence. Le sens est le sens de A vers B, la norme, notée $\|\vec{V}\|$ (ce qui se lit : norme du vecteur $\vec{V}$), est la distance AB. Ici $\|\vec{V}\| = AB = 3$.



- **Égalité de vecteurs**

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme (fig. 1), éventuellement aplati (fig. 2).

Attention à l'ordre des points.

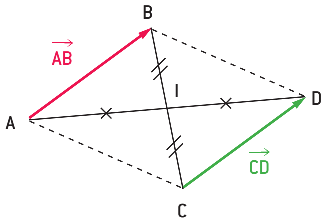


Figure 1

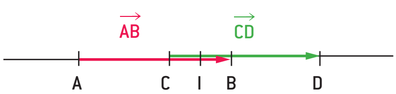


Figure 2

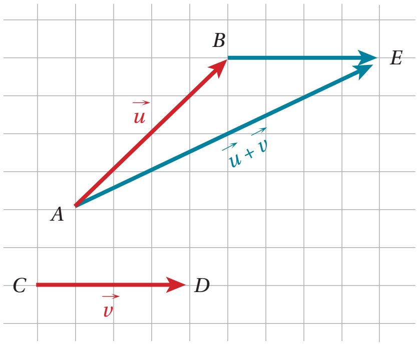
- **Construire la somme de deux vecteurs**

EXEMPLE

On se propose de construire la somme des deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

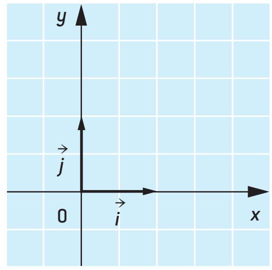
On place le point E tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD} = \vec{v}$ (donc $CBED$ est un parallélogramme).

Alors : $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$.



B Coordonnées d'un vecteur du plan

Repère orthonormé



Le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est **orthonormé** si : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **orthogonaux**.

Coordonnées d'un vecteur

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

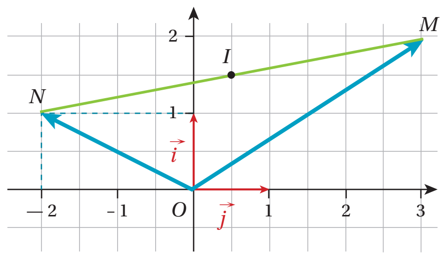
– Pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe deux nombres réels uniques x et y tels que $\vec{v}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$. x et y sont les **coordonnées du vecteur** $\vec{v}$.

– On note : $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou : $\vec{v}(x,y)$.

– **Les coordonnées (x, y) du point M** dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont les **coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$**.

EXEMPLE

Le point M a pour coordonnées : $(3, 2)$; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées : $(3, 2)$, $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+2\vec{j}$.
Le point N a pour coordonnées $(-2, 1)$; le vecteur $\overrightarrow{ON}$ a pour coordonnées : $(-2, 1)$, $\overrightarrow{ON}=-2\vec{i}+\vec{j}$.



Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

Soit A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, on a $M(3, 2)$ et $N(-2, 1)$, donc $\overrightarrow{NM}(3-(-2),2-1)$, $\overrightarrow{NM}(5,1)$.

Coordonnées d'un vecteur somme

Si $\vec{u}\,(x,y)$ et $\vec{u}'\,(x',y')$, alors $(\vec{u}+\vec{u}')\,(x+x',y+y')$.

EXEMPLE

Avec $\overrightarrow{OM}(3,2)$ et $\overrightarrow{ON}(-2,1)$, on a : $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})(3-2,2+1)$, $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})(1,3)$.

Coordonnées de $a\vec{u}$

Si $\vec{u}(x,y)$ et a est un nombre réel, alors $a\vec{u}(ax,ay)$.

EXEMPLE

Avec $\overrightarrow{AB}(4,2)$, on a : $-3\,\overrightarrow{AB}(-12,-6)$.

Coordonnées du milieu I du segment [AB]

$\mathrm{I}\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2},\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$.

Coordonnées de vecteurs égaux

Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{u}'(x',y')$ deux vecteurs.

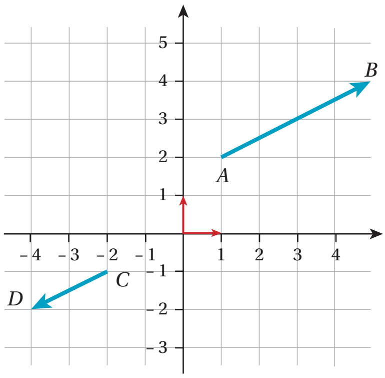
$\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si : $x=x'$ et $y=y'$.

Vecteurs colinéaires

– Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction.

– Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

– Deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ sont **colinéaires** si et seulement si leurs coordonnées sont respectivement proportionnelles : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x'}{y'}$.



EXEMPLE

Sur l'exemple de la figure, on a : $A(1, 2)$ et $B(5, 4)$, donc $\overrightarrow{AB}(4, 2)$; $C(-2, -1)$ et $D(-4, -2)$, donc $\overrightarrow{CD}(-2, -1)$. Avec $x = 4$, $y = 2$, $x' = -2$, $y' = -1$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{-2}{-1} = 2$; $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x'}{y'}$; les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

La **norme** de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ est la distance AB.

EXEMPLE

Avec $\overrightarrow{NM}(5, 1)$, on obtient $NM = \|\overrightarrow{NM}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$.

2 Calcul vectoriel dans l'espace

Terminales professionnelles du groupement B

Tous les résultats donnés dans le plan s'étendent à l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Si $\vec{u}(x, y, z)$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

EXEMPLE

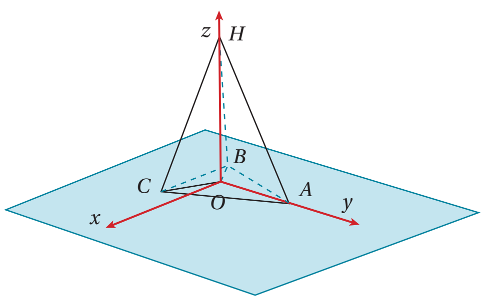
L'espace est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points A, B, C, H de coordonnées respectives (0, 15, 0) ; (– 13 ; – 7,5 ; 0) ; (13 ; – 7,5 ; 0) et (0, 0, 40).

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ sont :

$(0 - (-13) ; 0 - (-7{,}5) ; 40 - 0)$; $\overrightarrow{BH}(13 ; 7{,}5 ; 40)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CH}$ sont :

$(0 - 13 ; 0 - (-7{,}5) ; 40 - 0)$; $\overrightarrow{CH}(-13 ; 7{,}5 ; 40)$.



- $\left\|\overrightarrow{BH}\right\| = BH = \sqrt{13^2 + 7{,}5^2 + 40^2} = \sqrt{1\,825{,}25}$.

$\left\|\overrightarrow{CH}\right\| = CH = \sqrt{(-13)^2 + 7{,}5^2 + 40^2} = \sqrt{1\,825{,}25}$.

$CH = BH$. Le triangle CBH est isocèle.

PREMIER EXERCICE

Premières professionnelles

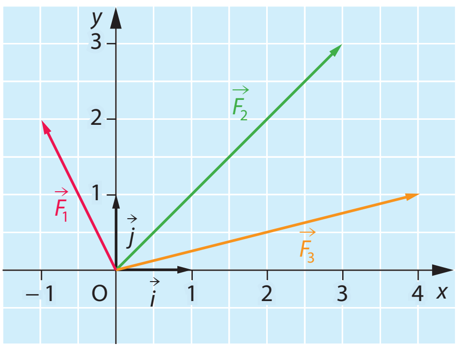
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On donne trois vecteurs par leurs coordonnées dans le repères $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

$$\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \vec{v}_2\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\ \vec{v}_3\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Déterminer les coordonnées du vecteur : $\vec{w} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3$.

2.



a. Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

b. En déduire les coordonnées du vecteur : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

c. Donner le module de $\vec{R}$ (c'est-à-dire $\left\|\vec{R}\right\|$).

3. Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. On considère trois points :

$A\left(2,\ -\dfrac{3}{4}\right)$ $B(-1,\ 2)$ $C\left(5,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Quelles sont les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogrammme ?

CORRIGÉ

1. On a : $\vec{w}\begin{pmatrix}3\times 1 & -2\times(-3) & +5\times(-1)\\ 3\times 2 & -2\times 0 & +5\times(-1)\end{pmatrix}$.

$\vec{w}\begin{pmatrix}3+6-5\\6-5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ ou $\vec{w} = 4\vec{i} + \vec{j}$.

2. a. On a : $\vec{F}_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{F}_2\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{F}_3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

b. D'où $\vec{R}_1\begin{pmatrix}-1+3+4\\2+3+1\end{pmatrix}$, $\vec{R}_1\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$.

c. $\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2\times 36} = \sqrt{2}\times\sqrt{36} = 6\sqrt{2}$.

3. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Notons (x_D, y_D) les coordonnées du point D.

Donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-(\frac{3}{4}) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x_D \\ \frac{1}{2}-y_D \end{pmatrix}$

ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2+\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x_D \\ \frac{1}{2}-y_D \end{pmatrix}$.

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ on déduit que :

$-3 = 5 - x_D$ et $2+\frac{3}{4} = \frac{1}{2} - y_D$,

$-3-5 = -x_D$ et $2+\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -y_D$,

$-8 = -x_D$, $2+\frac{3}{4} - \frac{2}{2} = -y_D$,

$x_D = 8$, $2+\frac{1}{4} = -y_D$, $x_D = 8$ et $2 + 0{,}25 = -y_D$.

$x_D = 8$ et $-y_D = -2{,}25$.

Faites une figure.

MATHÉMATIQUES

10 Trigonométrie

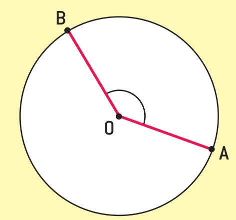
Premières professionnelles des groupements A et B

Ces notions sont utilisées en physique-chimie, en mécanique et en électricité.

1 Définitions

A Mesure d'un angle géométrique

Lors de l'étude de figures géométriques, les angles géométriques jouent un rôle très important.



L'angle géométrique $\widehat{AOB}$ peut permettre de définir l'arc AB intercepté sur un cercle de centre O.

Unités de mesure

Les deux principales unités de mesure sont :
- le **degré** (un angle plat a pour mesure 180 degrés) ;
- le **radian** (un arc de cercle de mesure un radian a même longueur que le rayon du cercle et un angle plat a pour mesure π radians).

En topographie, pour les plans de terrain, les cartes, on utilise le **grade** (un angle plat a pour mesure 200 grades).

Conversion

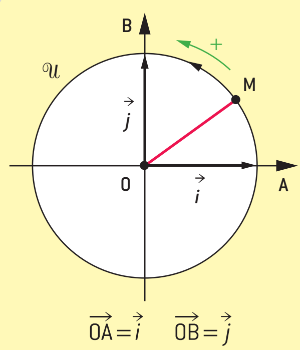
Si les mesures en radians, degrés, grades d'un même angle (ou d'un même arc) sont respectivement a, b, c, elles se déduisent les unes des autres par les relations :

$\frac{a}{\pi}=\frac{b}{180}=\frac{c}{200}$. En particulier, on a :

Mesure en radians : a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Mesure en degrés : b	0	30	45	60	90

B Mesure d'un angle (d'un arc) orienté

La notion d'angle géométrique est insuffisante pour étudier certains phénomènes comme la rotation d'un arbre moteur en mécanique : d'une part, on doit considérer des angles correspondant à plusieurs tours, donc supérieurs à 2π radians ou 360° et, d'autre part, on doit distinguer les deux sens possibles de rotation (marche avant, marche arrière). Aussi est-on amené à considérer des angles orientés.



Cercle trigonométrique $\mathcal{U}$

On appelle **cercle trigonométrique** $\mathcal{U}$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ le cercle de centre O, de rayon 1, pour lequel on choisit pour sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Tout point M de cercle $\mathcal{U}$ définit donc un **angle orienté** noté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et un **arc orienté** : AM.

Correspondance entre les nombres réels et les points du cercle $\mathcal{U}$

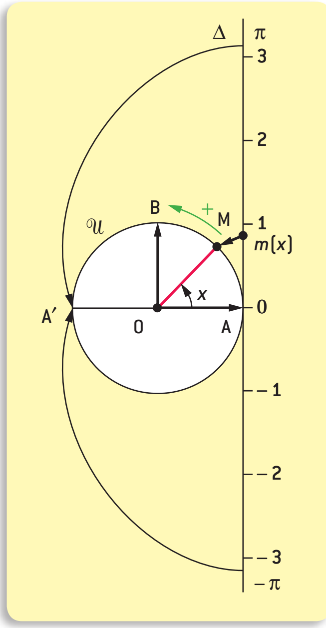
À tout point m de l'axe du repère $(A, \overrightarrow{OB})$ est associé un nombre réel x (l'abscisse de m). Le point m est l'image du réel x.

On matérialise la droite Δ par une ficelle. Si on enroule cette ficelle autour du cercle $\mathcal{U}$ en respectant les sens positifs sur l'axe Δ et le cercle trigonométrique $\mathcal{U}$, l'image de tout nombre réel vient coïncider avec un point du cercle.

L'image du nombre 0 coïncide avec le point A, l'image du nombre π avec le point A′… Les images de $\pi + 2\pi$, $\pi + 4\pi$, … $\pi + k2\pi$ (k entier relatif quelconque) viennent coïncider avec A′, puisque la longueur du cercle $\mathcal{U}$ est 2π.

Plus généralement, si le nombre réel x est associé au point M du cercle $\mathcal{U}$, les réels $x + 2\pi$, … $x + k2\pi$ (k nombre entier relatif quelconque) sont associés au même point M dans l'enroulement.

On établit ainsi une correspondance entre les nombres réels et les points du cercle trigonométrique $\mathcal{U}$.



Mesures d'un angle orienté (d'un arc orienté)

On appelle mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ (de l'arc orienté AM) l'un quelconque des nombres réels associés au point M dans « l'enroulement ».

Un angle, un arc, possèdent une infinité de mesures : si x est l'une d'entre elles, les autres sont de la forme : $x + k2\pi$ (k nombre entier relatif quelconque).

Mesure principale

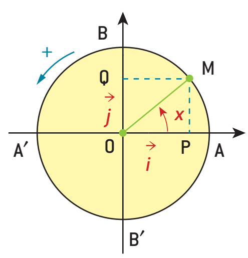
Parmi les mesures d'un angle orienté (ou d'un arc orienté) il en existe une, et une seule, appelée **mesure principale**, appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

2 Les fonctions sinus et cosinus

A Définitions

Le point M définit l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et le nombre réel x est une mesure de cet angle.

Dans l'enroulement précédent, tout nombre réel x est associé à un point unique M du cercle trigonométrique $\mathcal{U}$.



$\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$. $\mathcal{U}$.

- **Pour tout nombre réel x, $\cos x$ et $\sin x$ sont les coordonnées du point M image du nombre réel x sur le cercle trigonométrique**
- Par définition, M a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$ dans le repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

MATHÉMATIQUES

Des valeurs remarquables

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Conséquences de la définition

Pour tout nombre réel x :

$\mathbf{-1 \leq \cos x \leq 1}$; $\mathbf{-1 \leq \sin x \leq 1}$; $\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$.

Pour obtenir des valeurs approchées de $\cos x$ et $\sin x$

Pour obtenir avec une calculatrice les valeurs de $\cos x$ et de $\sin x$, il faut se mettre en « **mode radian** » et utiliser les touches $\boxed{\cos}$ et $\boxed{\sin}$. En effet, en considérant « l'enroulement » précédent, on constate que le cosinus (ou le sinus) du réel x est le cosinus (ou le sinus) de x radians.

Ainsi, $\cos 1 \approx 0{,}54$ et $\sin 1 \approx 0{,}84$.

Pour tout nombre réel k, $-1 \leq k \leq 1$, trouver x tel que $\cos x = k$ ou $\sin x = k$

EXEMPLES

- On cherche x, $0 \leq x \leq \pi$, tel que $\cos x = -0{,}98$.

La calculatrice est en « mode radian ».

Avec INV cos $(-0{,}98)$, ou 2nde cos $(-0{,}98)$, ou $\cos^{-1}(-0{,}98)$, ou Arc cos $(-0{,}98)$..., on obtient : $x \approx 2{,}94$.

Vérifiez-le !

- On cherche x, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tel que $\sin x = -0{,}37$.

Avec INV sin $(-0{,}37)$, ou 2nde sin $(-0{,}37)$, ou $\sin^{-1}(-0{,}37)$, ou Arc sin $(-0{,}37)$..., on obtient : $x \approx -0{,}38$.

Vérifiez-le !

REMARQUES

- Quand on cherche un nombre réel x tel que $\cos x = k$, avec $-1 \leq k \leq 1$, la calculatrice, à l'aide de la touche INV cos ou 2nde cos ou $\cos^{-1}$ ou Arcos, donne une valeur telle que : $0 \leq x \leq \pi$. La valeur obtenue est **en radians**.
- Quand on cherche un nombre réel x tel que $\sin x = k$, avec $-1 \leq k \leq 1$, la calculatrice, à l'aide de la touche INV sin ou 2nde sin ou $\sin^{-1}$ ou Arc sin, donne une valeur telle que : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. La valeur obtenue est **en radians**.

Une équation de la forme $\cos x = a$ avec $a > 1$ ou $a < -1$ n'a pas de solution.

À retenir

Pour tout nombre réel x : $\mathbf{\cos x = \cos (x \text{ radians})}$; $\mathbf{\sin x = \sin (x \text{ radians})}$.

Effectuer des conversions de degré en radian, de radian en degré

On a π radians = 180 degrés donc :

- 1 radian $= \frac{180}{\pi}$ degrés (α radians $= \frac{180 \times \alpha}{\pi}$ degrés) ;
- 1 degré $= \frac{\pi}{180}$ radian (n degrés $= \frac{n \times \pi}{180}$ radians).

EXEMPLES

- 2,5 radians $= \dfrac{180 \times 2{,}5}{\pi} \approx 143{,}24°$.
- 87 degrés $= \dfrac{87 \times \pi}{180} \approx 1{,}52$ rad.

Abréviations usuelles :
- degré : ° ;
- radian : rad.

B Périodicité

■ Les nombres réels x, et $x + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont des mesures d'un même angle orienté (ou d'un même arc orienté) ; ils sont associés au même point M, d'où : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin x$.

En particulier, pour $k = 1$ (la plus petite valeur strictement positive) : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

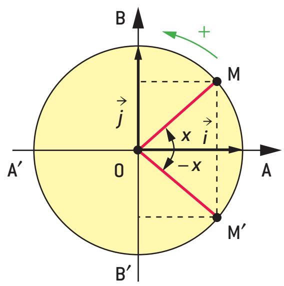
■ On en déduit la propriété suivante :
- **Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.**
- En physique, on utilise des fonctions de la forme :

$f : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $f : t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

L'expression de $(\omega t + \varphi)$ est appelée **phase instantanée** et le paramètre φ, **phase à l'origine**.

■ Ces fonctions ont pour **période** : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

C Parité



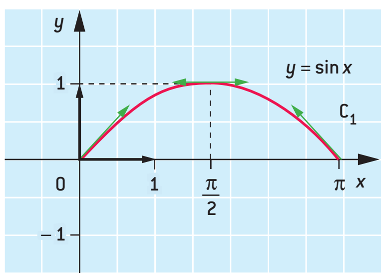
■ Les points M et M' de la figure étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

■ **La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.**

D Représentation graphique de la fonction sinus

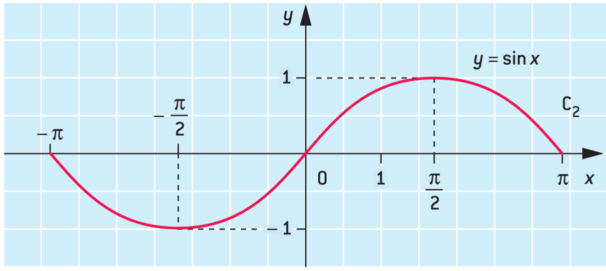
■ **Représentation graphique de la fonction définie sur [0, π] par $x \mapsto \sin x$**

Tableau de variation



Courbe représentative de la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \sin x$

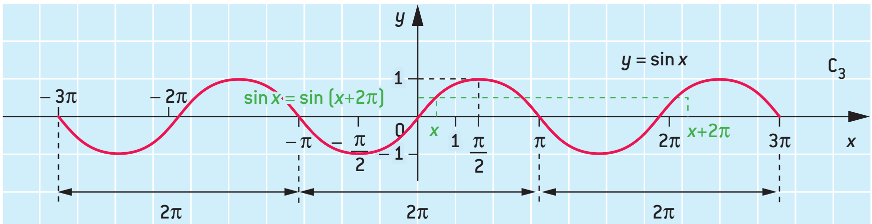
La fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \sin x$ étant impaire, la courbe C_2 s'obtient à partir de C_1 par symétrie de centre 0.



Courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$ étant périodique de période 2π, la courbe C_3 s'obtient à partir de C_2 par translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$.

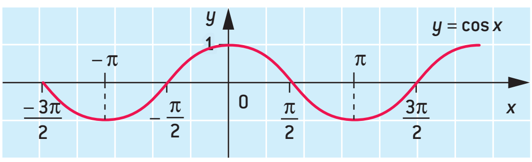
Observez sur la figure que : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.



La courbe obtenue est appelée **sinusoïde**.

E Courbe représentative de la fonction cosinus

On déduit la courbe représentative C_2 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos x$ de la courbe représentative C_1 de la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \cos x$ par translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$.



On démontre que la courbe obtenue est la sinusoïde « translatée » de $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

F Angles associés

Plutôt que de chercher à retenir directement les formules suivantes, il vaut mieux apprendre à les retrouver sur une figure.

Sur les quatre figures suivantes :

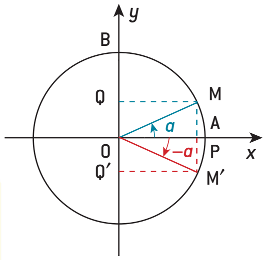
- $\cos a = \overline{OP}$, $\sin a = \overline{OQ}$;
- $\overline{OP}$ se lit « mesure algébrique de OP ». C'est la distance OP affectée du signe + ou du signe –, suivant la position de P par rapport à O ;
- $\overline{OP'}$ et $\overline{OQ'}$ sont respectivement les cosinus et sinus des angles associés.

Réels opposés : a et $-a$

Pour tout nombre réel a :

$\sin(-a) = -\sin a$;

$\cos(-a) = \cos a$.



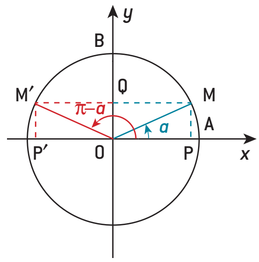
On peut retenir que la fonction sinus est impaire et que la fonction cosinus est paire.

Réels dont la somme est π : a et $\pi - a$

Pour tout nombre réel a :

$\sin(\pi - a) = \sin a$;

$\cos(\pi - a) = -\cos a$.

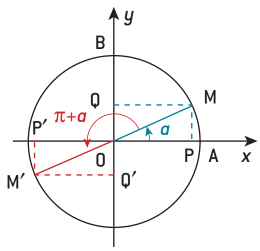


Réels dont la différence est π : a et $\pi + a$

Pour tout nombre réel a :

$\sin(\pi + a) = -\sin a$;

$\cos(\pi + a) = -\cos a$.



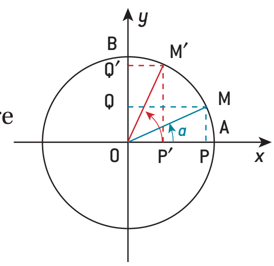
Réels dont la somme est $\frac{\pi}{2}$: a et $\frac{\pi}{2} - a$

Le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.

Pour tout nombre réel a :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$



EXEMPLES

• $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. • $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. • $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

• $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. • $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.

MATHÉMATIQUES

PREMIER EXERCICE

Premières professionnelles

QCM

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$

2. $\sin\frac{3\pi}{4} =$

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$

3. $\sin\frac{2\pi}{3} =$

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$

4. $\cos\frac{5\pi}{6} =$

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}$

CORRIGÉ

1. Réponse c. **2.** Réponse c. **3.** Réponse b. **4.** Réponse c.

On utilise les résultats du tableau du ② A et ceux du ② F.