PREMIER EXERCICE

Avec le tableur

Premières et Terminales professionnelles

A. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 10]$ par :

$$f(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 8.$$

1. a. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 10]$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$.

d. Quel est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0, 10]$?

2. La feuille de calcul ci-dessous, extraite d'un tableur, donne les images par la fonction f de quelques valeurs de l'intervalle $[0, 10]$.

	A	B
1	x	$f(x) = -0{,}4x^2 + 4x - 8$
2	0	– 8,0
3	1	– 4,4
4	2	– 1,6
5	3	0,4
6	4	1,6
7	5	2
8	6	1,6

Quelle formule, destinée à être recopiée vers le bas, faut-il écrire en B2 pour compléter la colonne B ?

B. Une petite entreprise fabrique des chaudières à bois pour les petits immeubles. Pour des raisons de stockage, la production mensuelle q est comprise entre 0 et 10 unités.
Le coût total de fabrication mensuel, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction C définie sur $[0, 10]$ par : $C(q) = 0{,}4q^2 + 1{,}5q + 8$.
Chaque chaudière est vendue 5,5 milliers d'euros.

1. Calculer la recette puis le bénéfice correspondant à trois chaudières.

2. Montrer que le bénéfice mensuel $B(q)$, exprimé en milliers d'euros, est défini sur $[0, 10]$ par $B(q) = -0{,}4q^2 + 4q - 8$.

3. En utilisant la partie **A.** :

a. Déterminer pour quelles productions le bénéfice est positif.

b. Déterminer le nombre de chaudières à fabriquer et à vendre mensuellement pour que le bénéfice soit maximal.

c. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

CORRIGÉ

A. 1. a. $f'(x) = -0{,}4(2x) + 4 = -0{,}8x + 4$.

b. $f'(x) \geq 0$ si et seulement si : $-0{,}8x + 4 \geq 0$; $4 \geq 0{,}8x$; $x \leq \dfrac{4}{0{,}8} = 5$.

$f'(x) < 0$ si et seulement si : $x > 5$. D'où le signe de $f'(x)$:

x	0		5		10
$f'(x)$		+	0	–	

MATHÉMATIQUES

c. D'où le tableau de variation :

x	0		5		10
Signe de $f'(x)$		+	0	–	
Variation de f	– 8	↗	2	↘	– 8

d. f est maximale pour $x = 5$.

2. = – 0,4*A2^2+4*A2–0,8.

B. 1. Pour trois chaudières vendues, la recette est $3 \times 5{,}5 = 16{,}5$.

Le bénéfice est $16{,}5 - C(3) = 0{,}4$ millier d'euros.

2. $B(q) = 5{,}5q - C(q)$; $B(q) = 5{,}5q - (0{,}4q^2 + 1{,}5q + 8)$; $B(q) = -0{,}4q^2 + 4q - 8$.

3. a. $B(q) = f(q)$. On déduit de la feuille de calcul que $B(x) > 0$ lorsque x appartient à $[3, 7]$.

b. Le bénéfice est maximal lorsque l'entreprise produit et vend cinq chaudières.

c. Ce bénéfice maximal est alors de 2 000 euros.

DEUXIÈME EXERCICE

Fonction polynôme de degré 3 et santé du sport

Terminales professionnelles

Conformément à l'usage de la langue courante, on utilise le mot « poids » pour désigner ce qui est en fait la masse.

On a tracé sur l'annexe la courbe $\mathscr{C}$ représentant le poids, en kilogrammes, d'un sportif en fonction du temps, exprimé en années, sur une période d'étude de 5 années.

A. Étude graphique

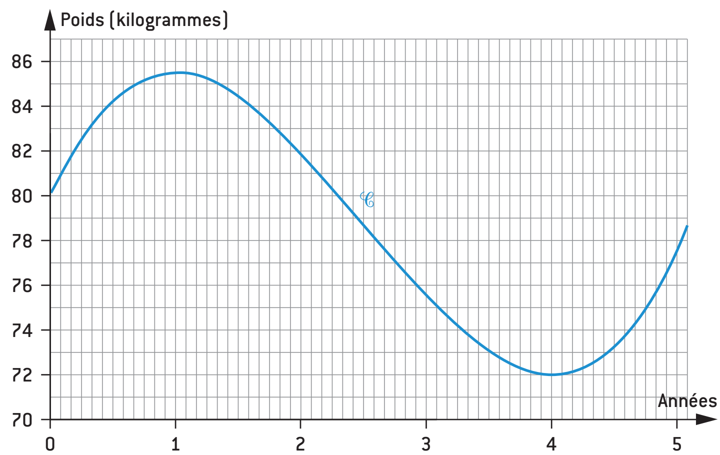
Les résultats aux questions posées dans cette partie seront donnés en s'aidant du graphique de l'annexe, avec la précision que permet la lecture graphique et en faisant apparaître les traits de construction utiles. (Après avoir reproduit la figure. Le jour de l'épreuve, une feuille réponse avec la figure est fournie.)

1. Pendant combien de mois le poids du sportif est-il au-dessus de 85 kilogrammes sur la période étudiée ?

2. Quel est le poids minimum et le poids maximum du sportif sur la période étudiée ?

Annexe

Un carreau en abscisse correspond à une échelle de temps de 1 mois.



B. Étude d'une fonction

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 5]$ par : $f(x) = x^3 - 7{,}5x + 12x + 80$.

1. La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, 5]$.

2. Montrer que $f'(x) = (x - 1)(3x - 12)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, 5]$.

3. a. Reproduire et compléter le tableau de signes suivant. (Ou compléter sur la feuille réponse.)

x	0 5
$x - 1$	
$3x - 12$	
$(x - 1)(3x - 12)$	

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5]$.

c. Cette étude de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5]$ confirme-t-elle les réponses à la seconde question de la partie **A** ? Justifier la réponse.

Dans une évaluation, la courbe et le tableau précédents sont donnés sur une feuille réponse ramassée à la fin de l'épreuve et ne sont donc pas à reproduire.

MATHÉMATIQUES

CORRIGÉ

A.1. Le poids est au-dessus de 85 kg pendant 8 mois.

2. Le poids minimal est de 72 kg et le poids maximal est de 85,5 kg.

B.1. Pour tout réel x de $[0, 5]$, $f'(x) = 3x^2 - 7{,}5(2x) + 12$,
$f'(x) = 3x^2 - 15x + 12$.

REMARQUE

On applique une formule du paragraphe ② C.

2. Pour tout réel x de $[0, 5]$,
$(x - 1)(3x - 12) = 3x^2 - 12x - 3x + 12$,
$(x - 1)(3x - 12) = 3x^2 - 15x + 12 = f'(x)$.

3.a. Pour remplir le tableau de signes, on résout l'inéquation $x - 1 \geq 0$, équivalente à : $x \geq 1$, et l'inéquation $3x - 12 \geq 0$, équivalente à : $3x \geq 12$ et à : $x \geq 4$.

x	0		1		4		5
$x - 1$		−	0	+		+	
$3x - 12$		−		−	0	+	
$(x - 1)(3x - 12)$		+	0	−	0	+	

b. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		1		4		5
$x - 1$		+	0	+	0	+	
Variation de f	80	↗	85,5	↘	72	↗	77,5

c. On retrouve les valeurs minimales et maximales obtenues graphiquement à la partie **A**.